2022 新高考基地学校期中大联考

数学试卷

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡"条形码粘贴处"。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x(x-2)\leqslant 0\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $A\cup B=$

A．$[-1,0]$　　B．$[0,1]$　　C．$[-1,2]$　　D．$[1,2]$

2. 已知复数 z 满足 $(z-3)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

3. 已知直线 $l_1:(3+m)x+4y=5-3m$，$l_2:2x+(5+m)y=8$．则"$l_1 /\!/ l_2$"是"$m=-7$"的

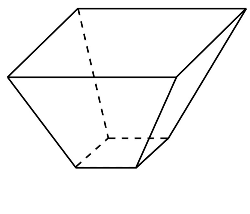
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

4. 我国古代《九章算术》将上下两个平行平面为矩形的六面体称为刍童．如图池盆几何体是一个刍童，其中上下底面为正方形，边长分别为6和2，侧面是全等的等腰梯形，梯形的高为$2\sqrt{2}$，若盆中积水深为池盆高度的一半，则该盆中积水的体积为

A．$\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{28}{3}$

C．$\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$　　D．$\dfrac{52}{3}$



5. 关于函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ $(\varphi\in\mathbf{R})$ 有如下四个命题：

甲：该函数在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增；

乙：该函数图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到一个奇函数；

丙：该函数图象的一条对称轴方程为 $x=-\frac{5\pi}{6}$；

丁：该函数图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{12},0)$．

如果只有一个假命题，则该命题是

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

6. 已知函数 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}+2$，则关于 x 的不等式 $f(2x-1)+f(2x)>4$ 的解集为

A．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　C．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

7. 若 $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=$

A．$-\frac{8}{9}$　　B．$\frac{8}{9}$　　C．$-\frac{17}{18}$　　D．$\frac{17}{18}$

8. 设 $k>0$，若不等式 $k\log_3(kx)-3^x\leqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立，则 k 的最大值为

A．e　　B．$\mathrm{e}\ln 3$　　C．$\log_3\mathrm{e}$　　D．3

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$，则

A．$x-y>0$　　B．$\sin x-\sin y>0$

C．$2^x-2^y>0$　　D．$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}>2$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_n 与 S_n 的等差中项为常数 t，则

A．数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

B．$a_{n+2}a_n\geqslant 0$

C．数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递增数列

D．当且仅当 $t<0$ 时，数列 $\{(n+1)a_n\}$ 是递增数列

11．若直线 $y=\frac{1}{2}x+b\left(b\in\mathbf{R}\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，则曲线 $y=f(x)$ 可以是

A．$f(x)=x^3+2x^2+8$　　　　B．$f(x)=\tan x$

C．$f(x)=x\mathrm{e}^x$　　　　D．$f(x)=\ln\frac{1}{2x+1}$

12．设 $m\in\mathbf{R}$，直线 $mx-y-3m+1=0$ 与直线 $x+my-3m-1=0$ 相交于点 $P(x,y)$．线段 AB 是圆 $C:(x+2)^2+(y+1)^2=4$ 的一条动弦，Q 为弦 AB 的中点，$|AB|=2\sqrt{3}$．

下列说法正确的是

A．点 P 在定圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 上

B．点 P 在圆 C 外

C．线段 PQ 长的最大值为 $6+\sqrt{2}$

D．$\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 的最小值为 $15-8\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=\left(1,2\sqrt{2}\right)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为________．

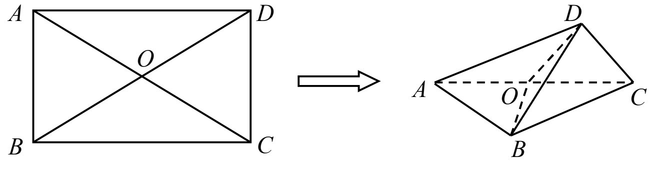
14．写出一个同时具有下列性质①②的函数 $f(x)=$________．

① $f(x)=-f(1+x)$；② $f'(x)$ 是偶函数．

15．某火电厂对其使用的燃煤进行精细化碳排放污染物控制，产生的废气经过严格过滤后排放．已知过滤过程中废气的剩余污染物数量 P（单位：mg / L）与过滤时间 t（单位：小时）之间的关系为 $P=P_0\mathrm{e}^{-kt}$．其中 P_0 为废气中原污染物总量，k 为常数．若过滤开始后经过 3 个小时废气中的污染物被过滤掉了原污染物总量的 50%，那么要使废气中剩余污染物含量不超过 5%，过滤开始后需要经过 n 小时，则 $k=$________，正整数 n 的最小值为________．

（参考数据：$\ln 2=0.693$，$\ln 5=1.609$）

16．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=x$，AC 与 BD 交于点 O，将△ACD 沿直线 AC 翻折，形成三棱锥 D-ABC．若在翻折过程中存在某个位置，使得 $OB\perp AD$，则 x 的取值范围是_______．



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}=4n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_1=1$，$b_{n+1}=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数},\\ -b_n+2^n, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和S_{2n}.

18.（12 分）

在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足$(a+2b)\cos C+c\cos A=0$.

（1）求角 C 的大小；

（2）设 AB 边上的角平分线 CD 长为 2，求$\triangle ABC$的面积的最小值.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=1-\dfrac{a}{5^x+1}$ 为奇函数.

（1）求实数 a 的值；

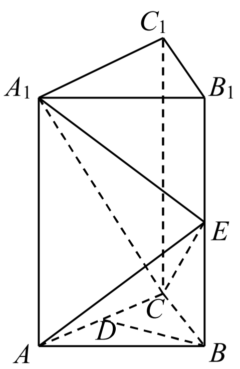
（2）若存在 $m\in[-1,1]$，使得不等式 $f(x^2)+f(mx-2)\leqslant 2-x^2-mx$ 成立，求 x 的取值范围.

20.（12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=3$，$AB=2$，D，E 分别是 AC，BB_1 的中点.

（1）证明：$BD//$ 平面 A_1CE；

（2）求二面角 $A-EA_1-C$ 的余弦值.



21．（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,0)$， $B(4,0)$，点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{1}{2}$．记 M 的轨迹为 C．

（1）求 C 的方程；

（2）设圆 C_2：$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 l 交曲线 C 于 P，Q 两点，l 交圆 C_2 于 R，S 两点，且 $|PQ|=2|RS|$，证明：直线 l 过定点．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-ax$， $a\in\mathbf{R}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，求证： $f(x_1)-f(x_2)<(2-a)(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2})$．

2022 新高考基地学校期中大联考
数学参考答案及讲评建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1~4 C D C B　　　　**5~8** D A A B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9． ACD　　**10．** BD　　**11．** AC　　**12．** BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． $\dfrac{\pi}{3}$　　　　**14．** $f(x)=\sin\pi x$（答案不唯一）

15． $\dfrac{\ln 2}{3}$（或填 0.231）；13　　　　**16．** $(0,2\sqrt{3})$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

【解】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $a_n+a_{n+1}=4n$，可得 $a_1+a_2=4,a_2+a_3=8$，

所以 $d=2$，$a_1=1$，　　…… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.　　…… 5 分

（2）当 n 为奇数时，$b_{n+1}=a_n=2n-1$，当 n 为偶数时，$b_n+b_{n+1}=2^n$，　　…… 6 分

所以，$S_{2n}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+(b_6+b_7)+\cdots+(b_{2n-2}+b_{2n-1})+b_{2n}$

$=1+2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2n-2}+4n-3$　　…… 8 分

$=\dfrac{1-2^{2n}}{1-4}+4n-3$

$=\dfrac{2^{2n}-10}{3}+4n$.　　……10 分

18．（12 分）

【解】（1）由 $(a+2b)\cos C+c\cos A=0$ 及正弦定理，可得 $(\sin A+2\sin B)\cos C+\sin C\cos A=0$，

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=-2\sin B\cos C$，

即 $\sin(A+C)=-2\sin B\cos C$，　　…… 2 分

在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，

即 $\sin B=-2\cos C\sin B$.

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$.　　…… 4 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$．　　　　…… 6 分

（2）由 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$．　　　　…… 8 分

所以 $a+b=\dfrac{1}{2}ab\geqslant 2\sqrt{ab}$，即 $ab\geqslant 16$，当且仅当 $a=b$ 取等号．　　　　……10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab\geqslant 4\sqrt{3}$，

即 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是 $4\sqrt{3}$．　　　　……12 分

19．（12 分）

【解】（1）因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，　　　　…… 1 分

所以 $1-\dfrac{a}{5^{-x}+1}=\dfrac{a}{5^{x}+1}-1$，

所以 $\dfrac{a\cdot 5^{x}}{5^{x}+1}+\dfrac{a}{5^{x}+1}=2$，即 $a=2$．　　　　…… 3 分

（2）因为函数 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x^2)+x^2\leqslant -f(mx-2)+2-mx=f(2-mx)+2-mx$，

令 $g(x)=f(x)+x$，　　　　…… 5 分

则 $g'(x)=f'(x)+1=\dfrac{2\ln 5}{(5^{x}+1)^2}+1>0$，

所以 $g(x)=f(x)+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，　　　　…… 7 分

所以 $x^2\leqslant 2-mx$ 在 $m\in[-1,1]$ 上有解，　　　　…… 9 分

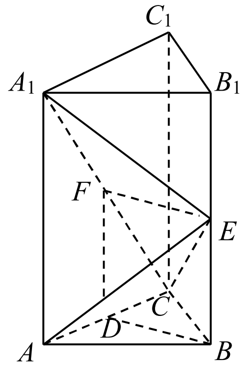
令 $h(m)=mx+x^2-2$，$m\in[-1,1]$，

则 $h(m)=mx+x^2-2$ 在 $[-1,1]$ 上是单调函数，

所以 $h(1)=x+x^2-2\leqslant 0$，或 $h(-1)=-x+x^2-2\leqslant 0$，　　　　……11 分

解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，即 x 的取值范围为 $[-2,2]$．　　　　……12 分

20．（12 分）



【解】（1）取 A_1C 的中点 F，连结 DF 和 EF，

因为 D，F 分别是 AC，A_1C 的中点，

所以 $DF\,/\!/\,AA_1$ 且 $DF=\dfrac{1}{2}AA_1$．

又在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是 BB_1 的中点，

所以 $BE\,/\!/\,AA_1$ 且 $BE=\dfrac{1}{2}AA_1$，

所以 $DF\,/\!/\,BE$，且 $DF=BE$，

所以四边形 $BDFE$ 是平行四边形， …… 2 分

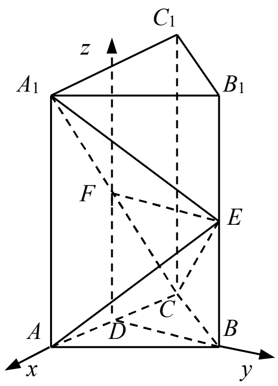
所以 $BD/\!/EF$．又 $EF\subset$ 平面 A_1CE， $BD\not\subset$ 平面 A_1CE，

所以 $BD/\!/$ 平面 A_1CE． …… 4 分

（2）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 D 分别是 AC 的中点，

所以 $BD\perp AC$. 又 $DF/\!/AA_1$，所以 $DF\perp DA$，$DF\perp DB$，

故以 D 为原点建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.



由 $AA_1=3$，$AB=2$ 得 $D(0,0,0)$， $A(1,0,0)$， $A_1(1,0,3)$，

$E(0,\sqrt{3},\frac{3}{2})$， $C(-1,0,0)$，

则 $\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-3)$， $\overrightarrow{A_1E}=(-1,\sqrt{3},-\frac{3}{2})$，

$\overrightarrow{A_1C}=(-2,0,-3)$． ……6 分

设平面 AA_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

平面 CA_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-3z_1=0,\\ -x_1+\sqrt{3}y_1-\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=\sqrt{3}$ 得 $n_1=(\sqrt{3},1,0)$， …… 8 分

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x_2-3z_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}y_2-\frac{3}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=3$ 得 $n_2=(3,0,-2)$， ……10 分

所以 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$，

所以二面角 $A-EA_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$． ……12 分

21．（12 分）

【解】（1）设 $M(x,y)$，由 $\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{1}{2}$ 得 $|MB|^2=4|MA|$，

即 $(x-4)^2+y^2=4\left[(x-1)^2+y^2\right]$， …… 2 分

化简得 $x^2+y^2=4$，所以 C 的方程是 $x^2+y^2=4$． …… 4 分

（2）设 l： $y=kx+t$，

则 $|PQ|=2\sqrt{4-\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}$， $|RS|=2\sqrt{1-\left(\dfrac{4k+t}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}$， …… 8 分

因为 $|PQ|=2|RS|$，所以 $\sqrt{4-\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}=2\sqrt{1-\left(\dfrac{4k+t}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}$，

所以 $t^2=4(4k+t)^2$，所以 $t=-8k$ 或 $t=-\dfrac{8k}{3}$． ……10 分

当 $t=-8k$ 时，直线 l 的方程为 $y=kx-8k$ 过定点 $(8,0)$

当 $t=-\dfrac{8k}{3}$ 时，直线 l 的方程为 $y=kx-\dfrac{8}{3}k$ 过定点 $(\dfrac{8}{3},0)$

所以直线 l 过定点 $(8,0)$ 或 $(\dfrac{8}{3},0)$． ……12 分

22．（12 分）

【解】（1） $f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-a=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-a\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}$，

①若 $a\leqslant 2$，则 $f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $a=2$，$x=0$ 时取等号，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增． …… 2 分

②若 $a>2$，令 $f'(x)=0$， $\mathrm{e}^{2x}-a\mathrm{e}^x+1=0$，得 $x=\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$．

当 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时， $f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时， $f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上单调递减． …… 5 分

（2）由（1）知 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$．

由于 $x_1<x_2$，所以 $x_1=\ln\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $x_2=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

且 $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}=1$，$x_1+x_2=0$．所以 $x_1<0<x_2$，所以 $\mathrm{e}^{x_1}<1<\mathrm{e}^{x_2}$， …… 7 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)<(2-a)(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2})$ 等价于 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}>2-a$．

由于 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}\cdot\mathrm{e}^{x_2}}-a\cdot\dfrac{x_1-x_2}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}=2-a\cdot\dfrac{x_1-x_2}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}=2-a\cdot\dfrac{2x_1}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}}$，

所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}>2-a$ 等价于 $\dfrac{2x_1}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}}<1$，即 $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}-2x_1<0$． ……10 分

设函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$，由（1）知 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

又 $x_1<0$， $g(0)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}-2x_1<0$，

所以， $f(x_1)-f(x_2)<(2-a)(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2})$． ……12 分

更多本地试卷及相关功能请点击下方图片中二维码即可领取