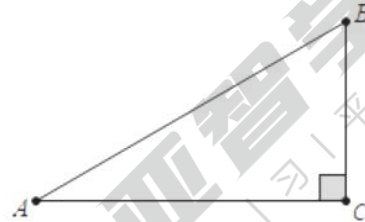


2021 ~ 2022 学年第一学期期中考试试卷

初三数学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。各题都有四个选项，其中只有一个正确的，选出正确答案并在答题纸上将该项涂黑）

- 关于 x 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 是一元二次方程，则 a 满足的条件是（ ）
A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a = 1$ D. $a \neq 0$
- 下列四个函数中，图象的顶点在 y 轴上的函数是（ ）
A. $y = x^2 - 3x + 2$ B. $y = x^2 - 4x + 4$ C. $y = -x^2 + 2x$ D. $y = 5 - x^2$
- 方程 $(x+1)^2 = 4$ 的解为（ ）
A. $x_1 = 1, x_2 = -3$ B. $x_1 = -1, x_2 = 3$ C. $x_1 = 2, x_2 = -2$ D. $x_1 = 1, x_2 = -1$
- 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，则下列结论中正确的是（ ）



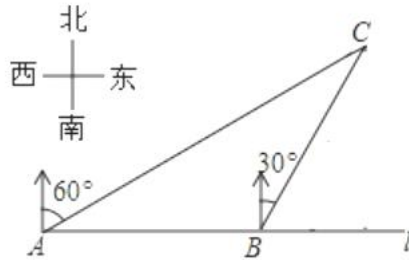
- 根据下列表格对应值：

x	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.02	0.01	0.03
- 若 $x = 2$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的一个根，则 a 的值为（ ）
A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一个解 x 的范围是（ ）

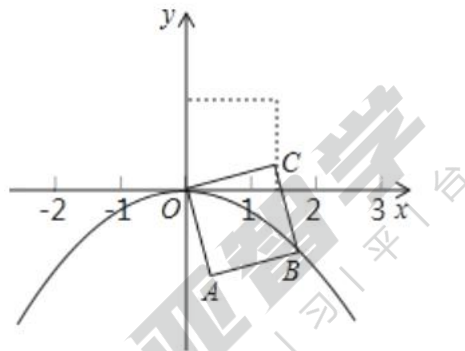
- 根据下列表格对应值：

x	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.02	0.01	0.03
- 如图，在一笔直的海岸线 l 上有相距 3km 的 A, B 两个观测站， B 站在 A 站的正东方向上，从 A 站测得船 C 在北偏东 60° 的方向上，从 B 站测得船 C 在北偏东 30° 的方向上，则船 C 到海岸线 l 的距离是（ ） km .



- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

8. 如图， O 为坐标原点，边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上，将正方形 $OABC$ 绕顶点 O 顺时针旋转 75° ，使点 B 落在某抛物线的图象上，则该抛物线的解析式为 ()

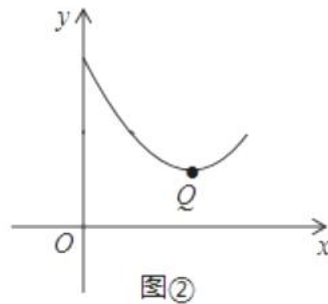
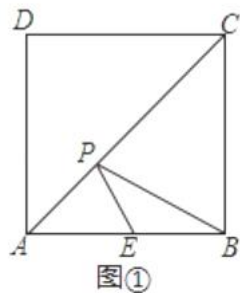


- A. $y = \frac{2}{3}x^2$ B. $y = -\frac{1}{3}x^2$ C. $y = -\frac{1}{2}x^2$ D. $y = -3x^2$

9. 一次足球训练中，小明从球门正前方将球射向球门，球射向球门的路线呈抛物线。当球飞行的水平距离为 $6m$ 时，球达到最高点，此时球离地面 $3m$ 。已知球门高是 $2.44m$ ，若足球能射入球门，则小明与球门的距离可能是 ()

- A. $10m$ B. $8m$ C. $6m$ D. $5m$

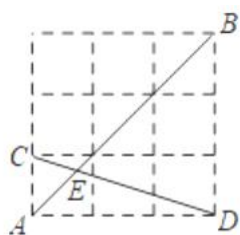
10. 如图①，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 的中点，点 P 是对角线 AC 上一动点，设 $PC = x$ ， $PE + PB = y$ ，图②是 y 关于 x 的函数图象，且图象上最低点 Q 的坐标可能是 ()



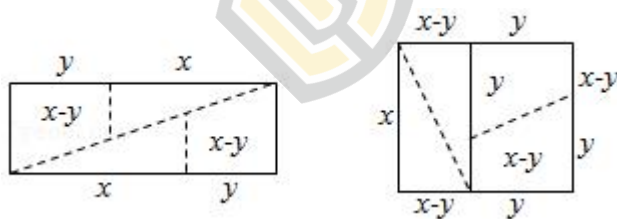
- A. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ B. $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{5})$ C. $(4, 3)$ D. $(4\sqrt{2}, 3\sqrt{5})$

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。把答案直接填在答题纸相对应的位置上）

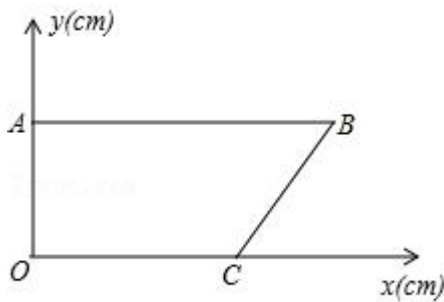
11. 二次函数 $y = x^2 - 4x + 7$ 图象的对称轴是直线 _____.
12. 已知方程 $3x^2 - x - 1 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 + x_2 - x_1x_2$ 的值为 _____.
13. 某商品进货价为每件 10 元, 售价每件 30 元时平均每天可以售出 20 件, 经调查发现, 如果每件降低 2 元, 那么平均每天多售出 4 件, 若想每天盈利 450 元, 设每件应降价 x 元, 可列出方程为 _____.
14. 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 的图象绕坐标原点旋转 180° 所得的新抛物线的解析式是 _____.
15. 若点 $M(-1, y_1)$, $N(1, y_2)$, $P(\frac{7}{2}, y_3)$ 都在抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 上, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 大小关系为 _____ (用“ $<$ ”连接).
16. 如图, 在由边长为 1 的小正方形组成的网格中. 点 A, B, C, D 都在这些小正方形的格点上, AB, CD 相交于点 E , 则 $\sin \angle AEC$ 的值为 _____.



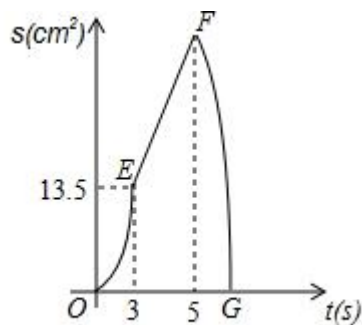
17. 如图, 将矩形沿图中虚线 (其中 $x > y$) 剪成四块图形, 用这四块图形恰能拼成一个正方形, 则 $\frac{x}{y} =$ _____.



18. 如图①, 在平面直角坐标系中, 点 A, C 分别在 y 轴和 x 轴上, $AB \parallel x$ 轴, $\cos B = \frac{4}{5}$. 点 P 从 B 点出发, 以 1 cm/s 的速度沿边 BA 匀速运动, 点 Q 从点 A 出发, 沿线段 $AO - OC - CB$ 匀速运动. 点 P 与点 Q 同时出发, 其中一点到达终点, 另一点也随之停止运动. 设点 P 运动的时间为 t (s), $\triangle BPQ$ 的面积为 S (cm^2), 已知 S 与 t 之间的函数关系如图②中的曲线段 OE 、线段 EF 与曲线段 FG .



图①



图②

- ①点 Q 的运动速度为 3cm/s ; ②点 B 的坐标为 $(9, 18)$;
 ③线段 EF 段的函数解析式为 $S = \frac{9}{2}t$;
 ④曲线 FG 段的函数解析式为 $S = -\frac{9}{10}t^2 + 9t$;
 ⑤若 $\triangle BPQ$ 的面积是四边形 $OACB$ 的面积的 $\frac{1}{9}$, 则时间 $t = 2\sqrt{2}$ 或 $t = \frac{15 + \sqrt{105}}{3}$.

三、解答题(本题共 10 小题, 共 76 分.把解答过程写在答题纸相应的位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明)

19. (本题满分 4 分)计算: $|\sqrt{2} - 1| + \sin 45^\circ - \sqrt{8 + \tan^2 60^\circ}$.

20. 解方程(本题满分 8 分)

(1) $x^2 - 6x = 0$

(2) $(x - 1)^2 = 3x - 3$

21. (本题满分 8 分)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边.

(1) 已知 $c = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, 求 $\angle A$;

(2) 已知 $c = 12$, $\sin A = \frac{1}{2}$, 求 b .

22. (本题满分 6 分)已知 $x^2 + (a+3)x + a+1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程.

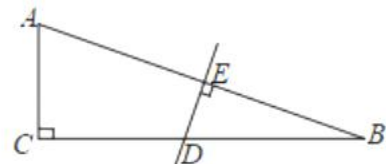
(1) 求证: 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 10$, 求实数 a 的值.

23. (本题满分 6 分)如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB 的垂直平分线与 AB, BC 分别交于点 E 和点 D , 且 $BD = 2AC$.

(1) 求 $\angle B$ 的度数.

(2) 求 $\tan \angle BAC$ (结果保留根号).



24. (本题满分 8 分)先阅读理解下面的例题, 再按要求解答下列问题:

例题: 求代数式 y^2+4y+8 的最小值.

解: $y^2+4y+8 = y^2+4y+4+4 = (y+2)^2+4$

$\therefore (y+2)^2 \geq 0$

$\therefore (y+2)^2+4 \geq 4$

$\therefore y^2+4y+8$ 的最小值是 4.

(1) 求代数式 m^2+m+4 的最小值;

(2) 求代数式 $4 - x^2+2x$ 的最大值;

(3) 某居民小区要在一块一边靠墙 (墙长 $15m$) 的空地上建一个长方形花园 $ABCD$, 花园一边靠墙, 另三边用总长为 $20m$ 的栅栏围成. 如图, 设 $AB = x (m)$, 请问: 当 x 取何值时, 花园的面积最大? 最大面积是多少?



25. (本题满分 8 分)已知关于 x 的方程 $(a - 1)x^2+2x+a - 1 = 0$.

(1) 若该方程有一根为 2, 求 a 的值及方程的另一根;

(2) 当 a 为何值时, 方程仅有一个根或是相同的根? 求出此时 a 的值及方程的根.

26. (本题满分 9 分)把抛物线 $C_1: y = x^2+2x+3$ 先向右平移 4 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度得到抛物线 C_2 .

(1) 直接写出抛物线 C_2 的函数关系式;

(2) 动点 $P(a, -6)$ 能否在抛物线 C_2 上? 请说明理由;

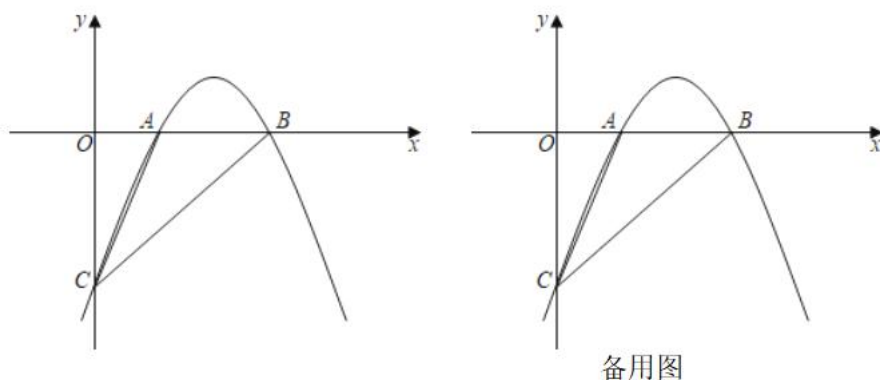
(3) 若点 $A(m, y_1)$, $B(n, y_2)$ 都在抛物线 C_2 上, 且 $m < n < 0$, 比较 y_1, y_2 的大小, 并说明理由.

27. (本题满分 9 分)如图, 抛物线 $y = mx^2 + (m^2+3)x - (6m+9)$ 与 x 轴交于点 A, B , 与 y 轴交于点 C , 已知 $B(3, 0)$.

(1) 求 m 的值和直线 BC 对应的函数表达式;

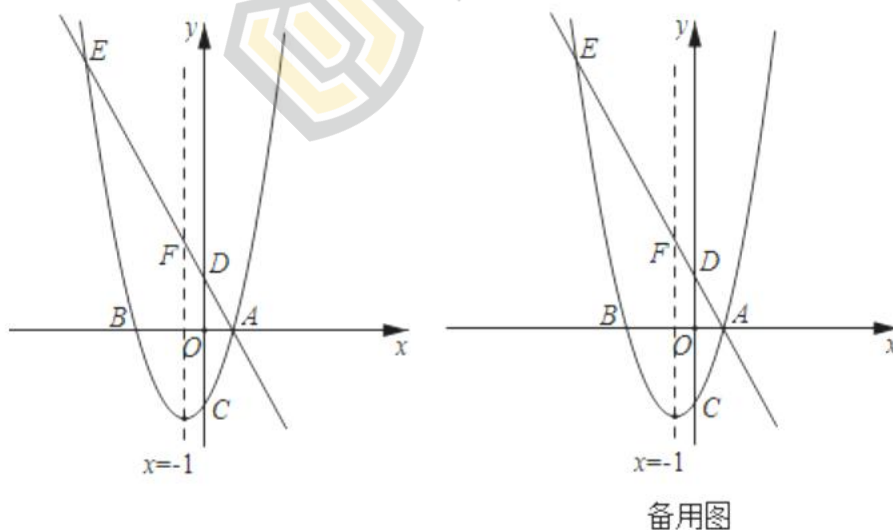
(2) P 为抛物线上一点, 若 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle ABC}$, 请直接写出点 P 的坐标;

(3) Q 为抛物线上一点, 若 $\angle ACQ = 45^\circ$, 求点 Q 的坐标.



28. (本题满分 10 分) 如图, 已知二次函数的图象与 x 轴交于 A 和 $B(-3, 0)$ 两点, 与 y 轴交于 $C(0, -3)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 直线 $y = -2x + m$ 经过点 A , 且与 y 轴交于点 D , 与抛物线交于点 E , 与对称轴交于点 F .

- (1) 求抛物线的解析式和 m 的值;
- (2) 在 y 轴上是否存在点 P , 使得以 D, E, P 为顶点的三角形与 $\triangle AOD$ 相似, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 试说明理由;
- (3) 直线 $y = 1$ 上有 M, N 两点 (M 在 N 的左侧), 且 $MN = 2$, 若将线段 MN 在直线 $y = 1$ 上平移, 当它移动到某一位置时, 四边形 $MEFN$ 的周长会达到最小, 请求出周长的最小值 (结果保留根号).



参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。各题都有四个选项，其中只有一个是正确的，选出正确答案并在答题纸上将该项涂黑）

1. 关于 x 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 是一元二次方程，则 a 满足的条件是（ ）

- A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a = 1$ D. $a \neq 0$

【分析】利用一元二次方程的定义判断即可求出 a 的值.

【解答】解：由关于 x 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 是一元二次方程，得到 $a \neq 0$.

故选：D.

【点评】此题考查了一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是解本题的关键.

2. 下列四个函数中，图象的顶点在 y 轴上的函数是（ ）

- A. $y = x^2 - 3x + 2$ B. $y = x^2 - 4x + 4$ C. $y = -x^2 + 2x$ D. $y = 5 - x^2$

【分析】根据二次函数的性质，图象的顶点在 y 轴上，则顶点的横坐标 $x = 0$ ，根据题意，计算出即可解答.

【解答】解：A、二次函数 $y = x^2 - 3x + 2$ ，顶点的横坐标 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \neq 0$ ，故本项错误；

B、二次函数 $y = x^2 - 4x + 4$ ，顶点的横坐标 $x = -\frac{b}{2a} = 2 \neq 0$ ，故本项错误；

C、二次函数 $y = -x^2 + 2x$ ，顶点的横坐标 $x = -\frac{b}{2a} = 1 \neq 0$ ，故本项错误；

D、二次函数 $y = 5 - x^2$ ，顶点的横坐标 $x = -\frac{b}{2a} = 0$ ，故本项正确；

故选：D.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质，应熟记二次函数的顶点坐标公式，本题读懂题意是关键.

3. 方程 $(x+1)^2 = 4$ 的解为（ ）

- A. $x_1 = 1, x_2 = -3$ B. $x_1 = -1, x_2 = 3$ C. $x_1 = 2, x_2 = -2$ D. $x_1 = 1, x_2 = -1$

【分析】首先直接开平方可得一元一次方程 $x+1 = \pm 2$ ，再解即可.

【解答】解： $(x+1)^2 = 4$,

$$x+1 = \pm 2,$$

$$\text{则 } x+1 = 2, x+1 = -2,$$

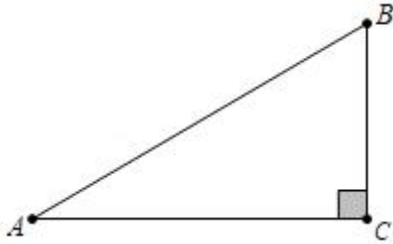
$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -3,$$

故选：A.

【点评】此题主要考查了直接开平方法解一元二次方程，关键是掌握形如 $x^2 = p$ 或 $(nx+m)^2 = p$ ($p \geq 0$) 的一元二次方程可采用直接开平方的方法解一元二次方程.

如果方程化成 $x^2 = p$ 的形式，那么可得 $x = \pm \sqrt{p}$.

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，则下列结论中正确的是（ ）



- A. $\sin A = \frac{1}{2}$ B. $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\tan B = 2$

【分析】分别利用未知数表示出各边长，再利用锐角三角函数关系得出答案.

【解答】解： \because 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，

\therefore 设 $BC = x$ ，则 $AC = 2x$ ，故 $AB = \sqrt{5}x$ ，

故 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，故 A 选项错误；

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故 B 选项错误；

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故 C 选项错误；

$\tan B = \frac{AC}{BC} = 2$ ，故 D 选项正确；

故选：D.

【点评】此题主要考查了锐角三角函数关系，正确记忆边角关系是解题关键.

5. 若 $x = 2$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的一个根，则 a 的值为（ ）
- A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

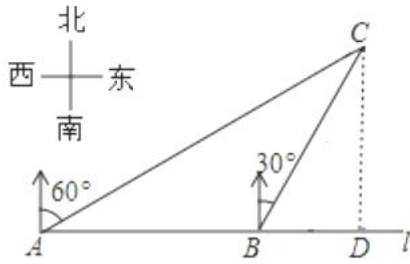
【分析】方程的根就是能使方程的左右两边相等的未知数的值，因而把 $x = 2$ 代入关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ ，就可以求出 a 的值.

【解答】解：把 $x = 2$ 代入 $x^2 - ax + 2 = 0$ ，得

$$2^2 - 2a + 2 = 0,$$

解得 $a = 3$.

故选：A.



根据题意得： $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\angle CBD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle CBD - \angle CAD = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle ACB$ ，

$\therefore BC = AB = 3\text{km}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中，

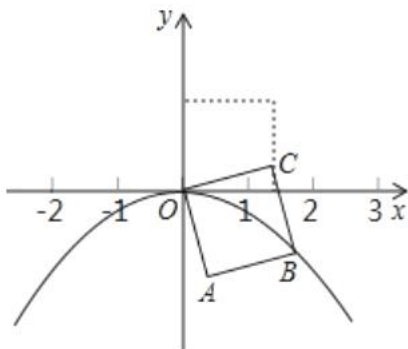
$\therefore CD = BC \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (km).

\therefore 船 C 到海岸线 l 的距离是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ km.

故选：C.

【点评】 本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是熟练运用锐角三角函数的定义，本题属于基础题型.

8. 如图， O 为坐标原点，边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上，将正方形 $OABC$ 绕顶点 O 顺时针旋转 75° ，使点 B 落在某抛物线的图象上，则该抛物线的解析式为 ()



A. $y = \frac{2}{3}x^2$

B. $y = -\frac{1}{3}x^2$

C. $y = -\frac{1}{2}x^2$

D. $y = -3x^2$

【分析】 过点 B 向 x 轴引垂线，连接 OB ，可得 OB 的长度，进而得到点 B 的坐标，代入

二次函数解析式即可求解.

【解答】解: 如图, 作 $BE \perp x$ 轴于点 E , 连接 OB ,

\because 正方形 $OABC$ 绕顶点 O 顺时针旋转 75° ,

$\therefore \angle AOE = 75^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 45^\circ$,

$\therefore \angle BOE = 30^\circ$,

$\therefore OA = \sqrt{2}$,

$\therefore OB = 2$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}OB = 1$,

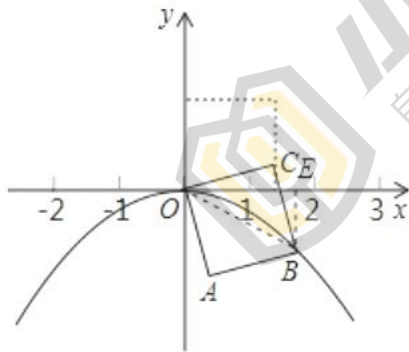
$\therefore OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{3}$,

\therefore 点 B 坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$,

代入 $y = ax^2$ ($a < 0$) 得 $a = -\frac{1}{3}$,

$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2$,

故选: B .

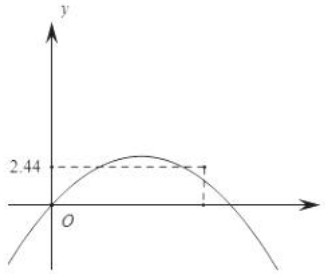


【点评】本题考查用待定系数法求函数解析式和勾股定理的运用, 解题的关键是利用正方形的性质及相应的三角函数得到点 B 的坐标.

9. 一次足球训练中, 小明从球门正前方将球射向球门, 球射向球门的路线呈抛物线. 当球飞行的水平距离为 $6m$ 时, 球达到最高点, 此时球离地面 $3m$. 已知球门高是 $2.44m$, 若足球能射入球门, 则小明与球门的距离可能是 ()
- A. $10m$ B. $8m$ C. $6m$ D. $5m$

【分析】建立直角坐标系, 根据题意求出函数解析式, 求 $y < 2.44$ 对应的 x 的值.

【解答】解: 如图, 建立直角坐标系, 设抛物线解析式为 $y = a(x - 6)^2 + 3$,



将 $(0, 0)$ 代入解析式得 $a = -\frac{1}{12}$,

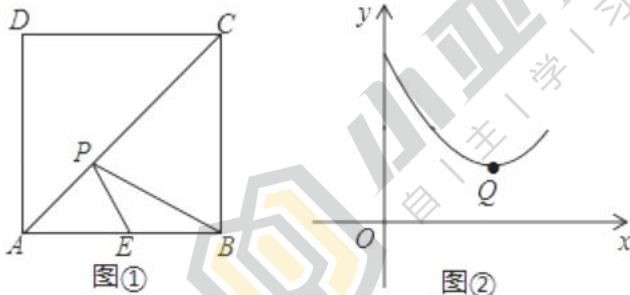
\therefore 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{12}(x - 6)^2 + 3$,

当 $x = 10$ 时, $y = \frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} < 2.44$, 满足题意,

故选: A.

【点评】 本题考查二次函数的实际应用, 建立直角坐标系构建二次函数模型是解题关键.

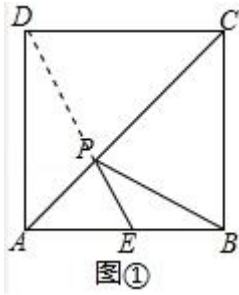
10. 如图①, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是 AB 的中点, 点 P 是对角线 AC 上一动点, 设 $PC = x$, $PE + PB = y$, 图②是 y 关于 x 的函数图象, 且图象上最低点 Q 的坐标可能是 ()



- A. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ B. $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{5})$ C. $(4, 3)$ D. $(4\sqrt{2}, 3\sqrt{5})$

【分析】 如图, 连接 PD . 由 B 、 D 关于 AC 对称, 推出 $PB = PD$, 推出 $PB + PE = PD + PE$, 推出当 D 、 P 、 E 共线时, $PE + PB$ 的值最小, 观察图象可知, 当点 P 与 A 重合时, $PE + PB = 9$, 推出 $AE = EB = 3$, $AD = AB = 6$, 分别求出 $PB + PE$ 的最小值, PC 的长即可解决问题;

【解答】 解: 如图, 连接 PD .



$\because B, D$ 关于 AC 对称,

$$\therefore PB = PD,$$

$$\therefore PB + PE = PD + PE,$$

\therefore 当 D, P, E 共线时, $PE + PB$ 的值最小,

观察图象可知, 当点 P 与 A 重合时, $PE + PB = 9$,

$$\therefore AE = EB = 3, AD = AB = 6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } DE = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore PB + PE \text{ 的最小值为 } 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的纵坐标为 } 3\sqrt{5},$$

$$\because AE \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AE} = 2,$$

$$\because AC = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore PC = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的横坐标为 } 4\sqrt{2},$$

$$\therefore Q(4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}).$$

故选: D .

【点评】 本题考查动点问题的函数图象, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用数形结合的思想解答.

四、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案直接填在答题纸相应的位置上)

11. 二次函数 $y = x^2 - 4x + 7$ 图象的对称轴是直线 $x = 2$.

【分析】 先将二次函数解析式化为顶点式, 即可得到该函数的对称轴.

【解答】 解: \because 二次函数 $y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$,

\therefore 该函数的对称轴是直线 $x = 2$,

故答案为： $x = 2$.

【点评】 本题考查二次函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答.

12. 已知方程 $3x^2 - x - 1 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 ，则 $x_1 + x_2 - x_1x_2$ 的值为_____.

【分析】 根据一元二次方程的解的定义以及根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$ ， $x_1x_2 = -1$ ，

再将它们代入 $x_1 + x_2 - x_1x_2$ ，计算即可.

【解答】 解：∵ 方程 $3x^2 - x - 1 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 ，

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{1}{3}, x_1x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 - x_1x_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

故答案为 $-\frac{2}{3}$.

【点评】 本题考查了根与系数的关系： x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 将根与系数的关系与代数式变形相结合解题是一种经常使用的解题方法. 也考查了一元二次方程的解的定义.

13. 某商品进货价为每件 10 元，售价每件 30 元时平均每天可以售出 20 件，经调查发现，如果每件降低 2 元，那么平均每天多售出 4 件，若想每天盈利 450 元，设每件应降价 x 元，可列出方程为_____.

【分析】 首先设每件应降价 x 元，利用销售量 \times 每件利润 = 450 元列出方程.

【解答】 解：设每件应降价 x 元，则每件定价为 $(30 - x)$ 元，根据题意，得：

$$(30 - x - 10)(20 + 2x) = 450,$$

故答案是： $(30 - x - 10)(20 + 2x) = 450$.

【点评】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程. 关键是看懂题意，找出题目中的等量关系，表示出销售量和每件利润，再列出方程.

14. 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 的图象绕坐标原点旋转 180° 所得的新抛物线的解析式是_____.

【分析】 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 的顶点坐标为 $(3, -4)$ ，再写出点 $(3, -4)$ 关于原点的对称点为 $(-3, 4)$ ，由于旋转 180° ，抛物线开口相反，于是得到抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 绕着原点旋转 180° ，所得抛物线的解析式是 $y = -2(x + 3)^2 + 4$.

【解答】 解：∵ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 的顶点坐标为 $(3, -4)$ ，点 $(3, -4)$ 关

于原点的对称点为 $(-3, 4)$,

\therefore 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ 的图象绕坐标原点旋转 180° 所得的新抛物线的解析式是 $y = -2(x + 3)^2 + 4$.

故答案为 $y = -2(x + 3)^2 + 4$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换: 由于抛物线平移后的形状不变, 故 a 不变, 所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法: 一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标, 利用待定系数法求出解析式; 二是只考虑平移后的顶点坐标, 即可求出解析式.

15. 若点 $M(-1, y_1)$, $N(1, y_2)$, $P(\frac{7}{2}, y_3)$ 都在抛物线 $y = x^2 - 4x + 1$ 上, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 大小关系为 _____ (用“ $<$ ”连接).

【分析】 利用图象法即可解决问题.

【解答】 解: $y = x^2 - 4x + 1$,

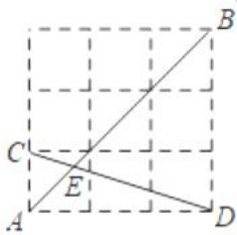
对称轴为 $x = 2$,

根据二次函数的图象可知: $y_1 < y_3 < y_2$.

故答案为: $y_1 < y_3 < y_2$.

【点评】 本题考查二次函数图象上的点的特征, 解题的关键是学会利用图象法比较函数值的大小.

16. 如图, 在由边长为 1 的小正方形组成的网格中. 点 A, B, C, D 都在这些小正方形的格点上, AB, CD 相交于点 E , 则 $\sin \angle AEC$ 的值为 _____.



【分析】 通过作垂线构造直角三角形, 由网格的特点可得 $\text{Rt}\triangle ABD$ 是等腰直角三角形, 进而可得 $\text{Rt}\triangle ACF$ 是等腰直角三角形, 求出 CF , 再根据 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ 的相似比为 1:3, 根据勾股定理求出 CD 的长, 从而求出 CE , 最后根据锐角三角函数的意义求出结果即可.

【解答】 解: 过点 C 作 $CF \perp AE$, 垂足为 F ,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

由网格可知， $\text{Rt}\triangle ABD$ 是等腰直角三角形，因此 $\text{Rt}\triangle ACF$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore CF = AC \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

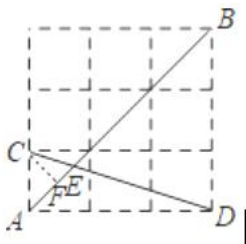
由 $AC \parallel BD$ 可得 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ ，

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{AC}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{4}CD = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

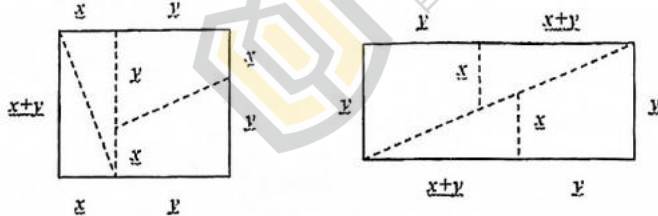
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ECF \text{ 中, } \sin \angle AEC = \frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。



【点评】考查锐角三角函数的意义、直角三角形的边角关系，作垂线构造直角三角形是解决问题常用的方法，借助网格，利用网格中隐含的边角关系是解决问题的关键。

17. 如图，将矩形沿图中虚线（其中 $x > y$ ）剪成四块图形，用这四块图形恰能拼成一个正方形，则 $\frac{x}{y} =$ _____。



【分析】观察图形可得，两个直角梯形的斜腰重合在一起可以组成一个长为 $(x+y)$ ，宽为 y 的矩形，两个直角三角形的斜边重合可以组成一个长为 x ，宽为 $(x+y)$ 的矩形，两个矩形放在一起恰好可以组成一个边长为 $(x+y)$ 的正方形，然后根据剪拼前后两个图形的面积不变列式求解即可。

【解答】解：如图所示，四块图形拼成一个正方形边长为 x ，根据剪拼前后图形的面积相等可得， $y(x+2y) = (x+y)^2$ ，

$$\therefore x^2 - xy - y^2 = 0,$$

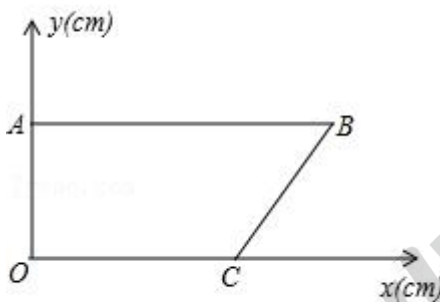
$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}y \text{ 或 } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}y \text{ (舍弃)},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

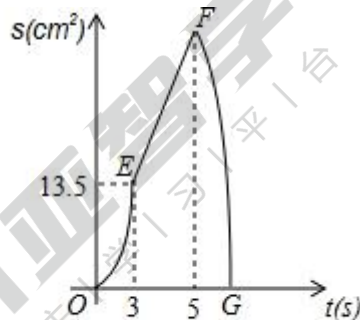
$$\text{故答案为: } \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

【点评】本题主要考查图形的剪拼，考查学生动手能力. 关键是正确拼出图形，掌握图形的面积不变.

18. 如图①，在平面直角坐标系中，点 A 、 C 分别在 y 轴和 x 轴上， $AB \parallel x$ 轴， $\cos B = \frac{4}{5}$. 点 P 从 B 点出发，以 1cm/s 的速度沿边 BA 匀速运动，点 Q 从点 A 出发，沿线段 $AO - OC - CB$ 匀速运动. 点 P 与点 Q 同时出发，其中一点到达终点，另一点也随之停止运动. 设点 P 运动的时间为 t (s)， $\triangle BPQ$ 的面积为 S (cm^2)，已知 S 与 t 之间的函数关系如图②中的曲线段 OE 、线段 EF 与曲线段 FG . 一下说法正确的是_____.



图①



图②

- ①点 Q 的运动速度为 3cm/s ; ②点 B 的坐标为 $(9, 18)$;
 ③线段 EF 段的函数解析式为 $S = \frac{9}{2}t$;
 ④曲线 FG 段的函数解析式为 $S = -\frac{9}{10}t^2 + 9t$;
 ⑤若 $\triangle BPQ$ 的面积是四边形 $OACB$ 的面积的 $\frac{1}{9}$, 则时间 $t = 2\sqrt{2}$ 或 $t = \frac{15+\sqrt{105}}{3}$.

【分析】①、②结合函数图象得出当 3 秒时， $BP = 3$ ，此时 $\triangle BPQ$ 的面积为 13.5cm^2 ，进而求出 AO 为 9cm ，即可得出 Q 点的速度，进而求出 AB 的长即可；

③由①、②可知 EF 段表示的是 $\triangle BPQ$ 底在增大，高不变的过程；

④首先得出 $PB = t$ ， $BQ = 30 - 3t$ ，则 $QM = \frac{3}{5}(30 - 3t) = 18 - \frac{9}{5}t$ ，利用 $S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}(18 - \frac{9}{5}t)$ 求出即可；

⑤首先得出 $\triangle BPQ$ 的面积，房两种情形分别列出方程即可解决问题；

【解答】解：①由题意可得出：当 3 秒时， $\triangle BPQ$ 的面积函数关系式改变，则 Q 在

AO 上运动 3 秒,

当 3 秒时, $BP = 3$, 此时 $\triangle BPQ$ 的面积为 13.5cm^2 ,

$\therefore AO$ 为 9cm ,

\therefore 点 Q 的运动速度为: $9 \div 3 = 3 (\text{cm/s})$,

故答案①正确;

②当运动到 5 秒时, 函数关系式改变, 则 $CO = 6\text{cm}$,

$$\therefore \cos B = \frac{4}{5},$$

\therefore 可求出 $AB = 6 + 12 = 18 (\text{cm})$,

$\therefore B(18, 9)$;

故答案②错误;

$$\textcircled{3} S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}t \times 9 = \frac{9}{2}t \quad (3 \leq t \leq 5)$$

\therefore 线段 EF 段的函数解析式为 $S = \frac{9}{2}t$;

故答案③正确;

④如图 (1): $PB = t$, $BQ = 30 - 3t$,

过点 Q 作 $QM \perp AB$ 于点 M ,

$$\text{则 } QM = \frac{3}{5}(30 - 3t) = 18 - \frac{9}{5}t,$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}t \left(18 - \frac{9}{5}t\right) = -\frac{9}{10}t^2 + 9t \quad (5 \leq t \leq 10),$$

即曲线 FG 段的函数解析式为: $S = -\frac{9}{10}t^2 + 9t$;

故答案④正确;

$$\textcircled{5} \therefore S_{\text{梯形 } OABC} = \frac{1}{2}(6+18) \times 9 = 108,$$

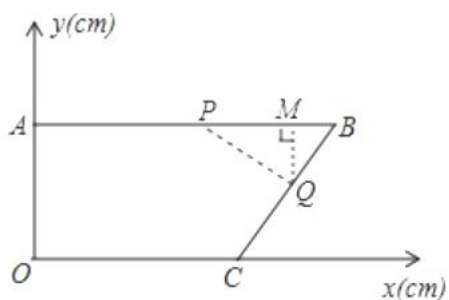
$$\therefore S = \frac{1}{9} \times 108 = 12,$$

当 $0 < t < 3$ 时, $S = \frac{3}{2}t^2$, $S = 12$ 时, $t = 2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$ (舍弃),

当 $5 < t < 10$ 时, $12 = -\frac{9}{10}t^2 + 9t$;

$$\text{解得 } t = \frac{15 + \sqrt{105}}{3} \text{ 或 } \frac{15 - \sqrt{105}}{3} \text{ (舍弃),}$$

综上所述: $t = 2\sqrt{2}$ 或 $t = \frac{15 + \sqrt{105}}{3}$, $\triangle BPQ$ 的面积是四边形 $OABC$ 的面积的 $\frac{1}{9}$



图(1)

故答案⑤正确；

所以正确答案为：①③④⑤

【点评】此题主要考查了动点问题的函数图象以及三角形，面积求法和待定系数法求函数解析式等知识，具体的关键是学会以分类讨论的思想思考问题，学会理由方程的思想解决问题，属于中考压轴题

五、解答题（本题共 10 小题，共 76 分.把解答过程写在答题纸相应的位置上，解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明）

19. 计算： $|\sqrt{2} - 1| + \sin 45^\circ - \sqrt{8} + \tan^2 60^\circ$

【分析】本题涉及绝对值、乘方、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】解： $|\sqrt{2} - 1| + \sin 45^\circ - \sqrt{8} + \tan^2 60^\circ$

$$= |1 - \sqrt{2}| + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + 3$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + 3$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2.$$

【点评】本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值，熟练掌握绝对值、乘方、二次根式化简等考点的运算.

20. 解方程

(1) $x^2 - 6x = 0$

(2) $(x - 1)^2 = 3x - 3$

【分析】(1) 利用因式分解法解方程；

(2) 先变形得到 $(x-1)^2 - 3(x-1) = 0$, 然后利用因式分解法解方程.

【解答】解: (1) $x(x-6) = 0$,

$$x = 0 \text{ 或 } x - 6 = 0,$$

所以 $x_1 = 0, x_2 = 6$;

$$(2) (x-1)^2 - 3(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x-1-3) = 0,$$

$$x = 1 \text{ 或 } x - 4 = 0,$$

所以 $x_1 = 1, x_2 = 4$.

【点评】 本题考查了解一元二次方程 - 因式分解法: 因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法, 这种方法简便易用, 是解一元二次方程最常用的方法. 也考查了配方法.

21. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边.

(1) 已知 $c = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}$, 求 $\angle A$;

(2) 已知 $c = 12, \sin A = \frac{1}{2}$, 求 b .

【分析】 根据直角三角形的边角关系求解即可.

【解答】 解: (1) $\because \sin B = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \angle B = 45^\circ;$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ;$$

(2) $\because c = 12, \sin A = \frac{1}{2} = \frac{a}{c}$,

$$\therefore a = 6,$$

$$\therefore b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6\sqrt{3},$$

【点评】 本题考查直角三角形的边角关系, 掌握直角三角形的边角关系是正确解答的关键.

22. 已知 $x^2 + (a+3)x + a + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程.

(1) 求证: 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 10$, 求实数 a 的值.

【分析】 (1) 先计算判别式, 再进行配方得到 $\Delta = (a+1)^2 + 4$, 然后根据非负数的性质

得到 $\Delta > 0$ ，再利用判别式的意义即可得到方程总有两个不相等的实数根；

(2) 根据根与系数的关系得到 $x_1+x_2 = -(a+3)$, $x_1x_2 = a+1$, 再利用完全平方公式由 $x_1^2+x_2^2 = 10$ 得 $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$, 则 $(a+3)^2 - 2(a+1) = 10$, 然后解关于 a 的方程即可.

【解答】(1) 证明: $\Delta = (a+3)^2 - 4(a+1)$

$$= a^2 + 6a + 9 - 4a - 4$$

$$= a^2 + 2a + 5$$

$$= (a+1)^2 + 4,$$

$$\therefore (a+1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a+1)^2 + 4 > 0, \text{ 即 } \Delta > 0,$$

\therefore 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 解: 根据题意得 $x_1+x_2 = -(a+3)$, $x_1x_2 = a+1$,

$$\therefore x_1^2+x_2^2 = 10,$$

$$\therefore (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10,$$

$$\therefore (a+3)^2 - 2(a+1) = 10,$$

整理得 $a^2+4a-3=0$, 解得 $a_1 = -2+\sqrt{7}$, $a_2 = -2-\sqrt{7}$,

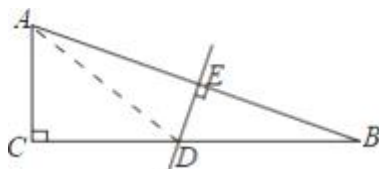
即 a 的值为 $-2+\sqrt{7}$ 或 $-2-\sqrt{7}$.

【点评】 本题考查了根与系数的关系: 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根时, $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. 也考查了根的判别式.

23. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB 的垂直平分线与 AB, BC 分别交于点 E 和点 D , 且 $BD = 2AC$.

(1) 求 $\angle B$ 的度数.

(2) 求 $\tan \angle BAC$ (结果保留根号).



【分析】(1) 首先证明 $DA = DB$, 再证明 $\angle ADC = 30^\circ$ 即可解决问题.

(2) 设 $AC = a$, 则 $AD = BD = 2a$, $CD = \sqrt{3}a$, $BC = 2a + \sqrt{3}a$, 推出 $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC}$ 即可

解决问题.

【解答】解：(1) 连接 AD .

$\because DE$ 垂直平分线段 AB ,

$\therefore DA = DB$,

$\therefore \angle B = \angle DAB$,

$\because BD = 2AC$,

$\therefore AD = 2AC$,

$\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 30^\circ$,

$\because \angle ADC = \angle DAB + \angle B$,

$\therefore \angle B = 15^\circ$.

(2) 设 $AC = a$, 则 $AD = BD = 2a$, $CD = \sqrt{3}a$, $BC = 2a + \sqrt{3}a$,

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2a + \sqrt{3}a}{a} = 2 + \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查解直角三角形，线段的垂直平分线等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，利用线段的垂直平分线定理解决问题.

24. 先阅读理解下面的例题，再按要求解答下列问题：

例题：求代数式 $y^2 + 4y + 8$ 的最小值.

解： $y^2 + 4y + 8 = y^2 + 4y + 4 + 4 = (y + 2)^2 + 4$

$\because (y + 2)^2 \geq 0$

$\therefore (y + 2)^2 + 4 \geq 4$

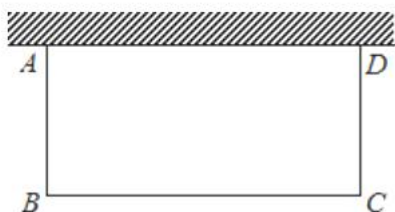
$\therefore y^2 + 4y + 8$ 的最小值是 4.

(1) 求代数式 $m^2 + m + 4$ 的最小值；

(2) 求代数式 $4 - x^2 + 2x$ 的最大值；

(3) 某居民小区要在一块一边靠墙（墙长 $15m$ ）的空地上建一个长方形花园 $ABCD$ ，花

园一边靠墙，另三边用总长为 $20m$ 的栅栏围成. 如图，设 $AB = x (m)$ ，请问：当 x 取何值时，花园的面积最大？最大面积是多少？



- 【分析】**(1) 多项式配方后，根据完全平方方式恒大于等于 0，即可求出最小值；
 (2) 多项式配方后，根据完全平方方式恒大于等于 0，即可求出最大值；
 (3) 根据题意列出关系式，配方后根据完全平方方式恒大于等于 0，即可求出最大值以及 x 的值即可.

【解答】解：(1) $m^2+m+4 = (m+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}$,

$$\therefore (m+\frac{1}{2})^2 \geq 0,$$

$$\therefore (m+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4} \geq \frac{15}{4},$$

则 m^2+m+4 的最小值是 $\frac{15}{4}$;

(2) $4 - x^2+2x = -(x-1)^2+5$,

$$\therefore -(x-1)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -(x-1)^2+5 \leq 5,$$

则 $4 - x^2+2x$ 的最大值为 5;

(3) 由题意，得花园的面积是 $x(20-2x) = -2x^2+20x$,

$$\therefore -2x^2+20x = -2(x-5)^2+50$$

$$\therefore -2(x-5)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -2(x-5)^2+50 \leq 50,$$

$$\therefore -2x^2+20x \text{ 的最大值是 } 50, \text{ 此时 } x=5,$$

则当 $x=5m$ 时，花园的面积最大，最大面积是 $50m^2$.

【点评】此题考查了配方法的应用，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

25. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2+2x+a-1=0$.

(1) 若该方程有一根为 2, 求 a 的值及方程的另一根;

(2) 当 a 为何值时, 方程仅有一个根或是相同的根? 求出此时 a 的值及方程的根.

【分析】(1) 把 $x=2$ 代入方程, 求出 a 的值, 再把 a 代入原方程, 进一步解方程即可;

(2) 分两种情况探讨: ①当 $a=1$ 时, 为一元一次方程; ②当 $a \neq 1$ 时, 利用 $b^2-4ac=0$ 求出 a 的值, 再代入解方程即可.

【解答】解: (1) 将 $x=2$ 代入方程 $(a-1)x^2+2x+a-1=0$, 得 $4(a-1)+4+a-1=0$,

解得: $a=\frac{1}{5}$.

将 $a=\frac{1}{5}$ 代入原方程得 $-\frac{4}{5}x^2+2x-\frac{4}{5}=0$,

解得: $x_1=\frac{1}{2}, x_2=2$.

$\therefore a=\frac{1}{5}$, 方程的另一根为 $\frac{1}{2}$.

(2) ①当 $a=1$ 时, 方程为 $2x=0$,

解得: $x=0$;

②当 $a \neq 1$ 时, 由 $b^2-4ac=0$ 得 $4-4(a-1)^2=0$,

解得: $a=2$ 或 0 .

当 $a=2$ 时, 原方程为: $x^2+2x+1=0$,

解得: $x_1=x_2=-1$;

当 $a=0$ 时, 原方程为: $-x^2+2x-1=0$,

解得: $x_1=x_2=1$.

综上, $a=1$ 或 0 或 2 ; 根为 0 或 1 或 -1

【点评】此题考查一元二次方程根的判别式, 以及探讨方程有一根的情况: 一元一次方程和一元二次方程有两个相等的实数根.

26. 把抛物线 $C_1: y=x^2+2x+3$ 先向右平移 4 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度得到抛物线 C_2 .

(1) 直接写出抛物线 C_2 的函数关系式;

(2) 动点 $P(a, -6)$ 能否在抛物线 C_2 上? 请说明理由;

(3) 若点 $A(m, y_1)$, $B(n, y_2)$ 都在抛物线 C_2 上, 且 $m < n < 0$, 比较 y_1, y_2 的大小, 并说明理由.

【分析】(1) 根据二次函数图象左加右减, 上加下减的平移规律进行求解;

(2) 根据二次函数的最小值即可判断;

(3) 根据二次函数的性质可以求得 y_1 与 y_2 的大小.

【解答】解: (1) $\because y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$,

\therefore 把抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x + 3$ 先向右平移 4 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度得到抛物线 $C_2: y = (x+1-4)^2 + 2 - 5$, 即 $y = (x-3)^2 - 3$,

\therefore 抛物线 C_2 的函数关系式为: $y = (x-3)^2 - 3$.

(2) 动点 $P(a, -6)$ 不在抛物线 C_2 上, 理由如下:

\because 抛物线 C_2 的函数关系式为: $y = (x-3)^2 - 3$,

\therefore 函数的最小值为 -3 ,

$\because -6 < -3$,

\therefore 动点 $P(a, -6)$ 不在抛物线 C_2 上;

(3) \because 抛物线 C_2 的函数关系式为: $y = (x-3)^2 - 3$,

\therefore 抛物线的开口向上, 对称轴为直线 $x = 3$,

\therefore 当 $x < 3$ 时, y 随 x 的增大而减小,

\because 点 $A(m, y_1)$, $B(n, y_2)$ 都在抛物线 C_2 上, 且 $m < n < 0 < 3$,

$\therefore y_1 > y_2$.

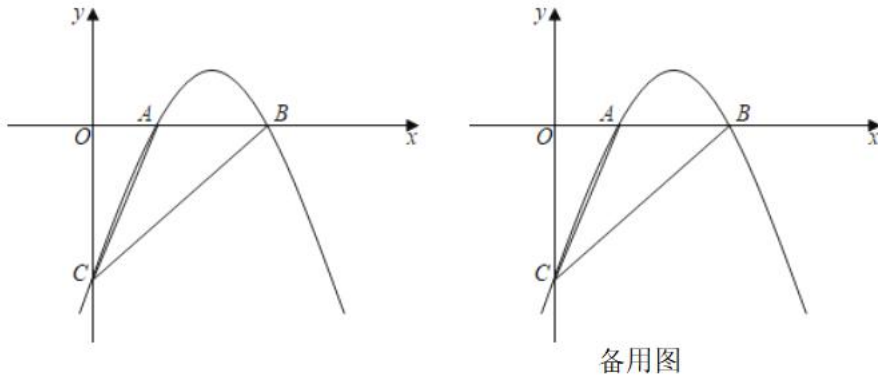
【点评】 本题考查二次函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答; 也考查函数图象的平移的规律.

27. 如图, 抛物线 $y = mx^2 + (m^2+3)x - (6m+9)$ 与 x 轴交于点 A, B , 与 y 轴交于点 C , 已知 $B(3, 0)$.

(1) 求 m 的值和直线 BC 对应的函数表达式;

(2) P 为抛物线上一点, 若 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle ABC}$, 请直接写出点 P 的坐标;

(3) Q 为抛物线上一点, 若 $\angle ACQ = 45^\circ$, 求点 Q 的坐标.



【分析】(1) 把点 B 坐标直接代入抛物线的表达式, 可求 m 的值, 进而求出抛物线的表达式, 可求出点 C 的坐标, 设直线 BC 的表达式, 把点 B 和点 C 的坐标代入函数表达式即可;

(2) 过点 A 作直线 BC 的平行线 AP_1 , 联立直线 AP_1 与抛物线表达式可求出 P_1 的坐标; 设出直线 AP_1 与 y 轴的交点为 G , 将直线 BC 向下平移, 平移的距离为 GC 的长度, 可得到直线 P_2P_3 , 联立直线表达式与抛物线表达式, 可求出点 P 的坐标;

(3) 取点 Q 使 $\angle ACQ = 45^\circ$, 作直线 CQ , 过点 A 作 $AD \perp CQ$ 于点 D , 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 过点 C 作 $CE \perp DF$ 于点 E , 可得 $\triangle CDE \cong \triangle DAF$, 求出点 D 的坐标, 联立求出点 Q 的坐标.

【解答】解: (1) 将 $B(3, 0)$ 代入 $y = mx^2 + (m^2 + 3)x - (6m + 9)$, 化简得, $m^2 + m = 0$, 则 $m = 0$ (舍) 或 $m = -1$,

$$\therefore m = -1,$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x - 3.$$

$$\therefore C(0, -3),$$

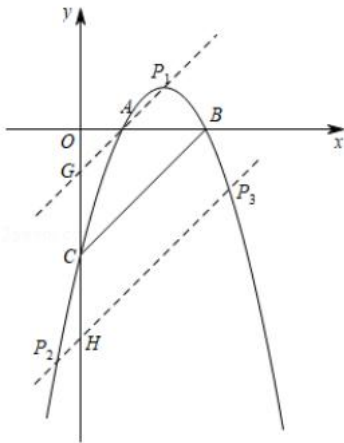
设直线 BC 的函数表达式为 $y = kx + b$,

将 $B(3, 0)$, $C(0, -3)$ 代入表达式, 可得,

$$\begin{cases} 0 = 3k + b \\ -3 = b \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases},$$

\therefore 直线 BC 的函数表达式为 $y = x - 3$.

(2) 如图, 过点 A 作 $AP_1 \parallel BC$, 设直线 AP_1 交 y 轴于点 G , 将直线 BC 向下平移 GC 个单位, 得到直线 P_2P_3 .



由 (1) 得直线 BC 的表达式为 $y = x - 3$, $A(1, 0)$,

\therefore 直线 AG 的表达式为 $y = x - 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore P_1(2, 1)$ 或 $(1, 0)$,

由直线 AG 的表达式可得 $G(0, -1)$,

$\therefore GC = 2, CH = 2$,

\therefore 直线 P_2P_3 的表达式为: $y = x - 5$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得,} \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-7 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}, \text{或,} \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-7 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

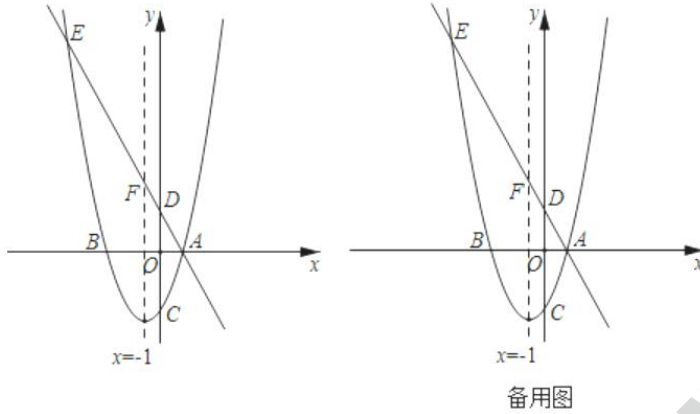
$\therefore P_2\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-7 - \sqrt{17}}{2}\right), P_3\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-7 + \sqrt{17}}{2}\right);$

综上所述, 符合题意的点 P 的坐标为: $(2, 1), (1, 0), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-7 - \sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-7 + \sqrt{17}}{2}\right);$

(3) 如图, 取点 Q 使 $\angle ACQ = 45^\circ$, 作直线 CQ , 过点 A 作 $AD \perp CQ$ 于点 D , 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 过点 C 作 $CE \perp DF$ 于点 E ,

求出点 P 的坐标；若不存在，试说明理由；

(3) 直线 $y=1$ 上有 M 、 N 两点 (M 在 N 的左侧)，且 $MN=2$ ，若将线段 MN 在直线 $y=1$ 上平移，当它移动到某一位置时，四边形 $MEFN$ 的周长会达到最小，请求出周长的最小值 (结果保留根号)。



【分析】(1) 根据对称性求出点 A 的坐标，设抛物线的解析式为 $y = a(x+3)(x-1)$ ，再利用待定系数法可得结论。

(2) 构建方程组求出点 E 的坐标，分两种情形：过点 E 作 $EP \perp y$ 轴于 P 。可证 $\triangle EDP \sim \triangle ADO$ ，推出 $P(0, 12)$ 。过点 E 作 $EP' \perp DE$ 交 y 轴于 P' ，同法可证， $\triangle P' DE \sim \triangle ADO$ ，求出 PP' 可得结论。

(3) 因为 E, F 为定点，推出线段 EF 的长为定值，推出当 $EM+FN$ 的和最小时，四边形 $MEFN$ 的周长最小，如图 2 中，画出直线 $y=1$ ，将点 F 向左平移 2 个单位得到 F' ，作点 E 关于直线 $y=1$ 的对称点 E' ，连接 $E'F'$ 与直线 $y=1$ 交于点 M ，过点 F 作 $FN \parallel E'F'$ 交直线 $y=1$ 于点 N ，由作图可知， $EM = E'M$ ， $FN = F'M$ ，推出 $EM+FN = E'M+F'M = E'F'$ ，此时 $EM+FN$ 的值最小，利用勾股定理求出 $E'F'$ ， EF 即可解决问题。

【解答】解：(1) \because 抛物线的对称轴 $x = -1$ ，与 x 轴的交点为 $A, B(-3, 0)$ ，
 $\therefore A(1, 0)$ ，

\therefore 可以假设抛物线的解析式为 $y = a(x+3)(x-1)$ ，

把 $C(0, -3)$ 代入得到， $a = 1$ ，

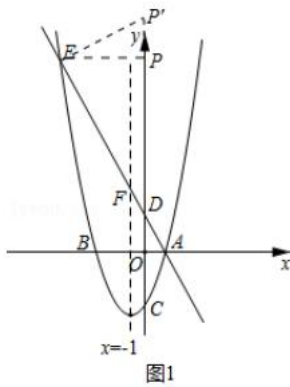
\therefore 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ 。

\because 直线 $y = -2x + m$ 经过点 $A(1, 0)$ ，

$\therefore 0 = -2 + m$ ，

$\therefore m = 2$ 。

(2) 如图 1 中,



\therefore 直线 AF 的解析式为 $y = -2x + 2$, 直线交 y 轴于 D , 与抛物线交于点 E ,

$\therefore D(0, 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1 \text{ 即点 } A, \text{ 或 } \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -5 \\ y = 12 \end{cases},$$

$\therefore E(-5, 12)$,

过点 E 作 $EP \perp y$ 轴于 P .

$\therefore \angle EPD = \angle AOD = 90^\circ$, $\angle EDP = \angle ODA$,

$\therefore \triangle EDP \sim \triangle ADO$,

$\therefore P(0, 12)$.

过点 E 作 $EP' \perp DE$ 交 y 轴于 P' ,

同法可证, $\triangle P'DE \sim \triangle ADO$,

$\therefore \angle P' = \angle DAO$,

$\therefore \tan \angle P' = \tan \angle DAO$,

$$\therefore \frac{EP}{PP'} = \frac{OD}{OA},$$

$$\therefore \frac{5}{PP'} = \frac{2}{1},$$

$\therefore PP' = 2.5$,

$\therefore P'(0, 14.5)$,

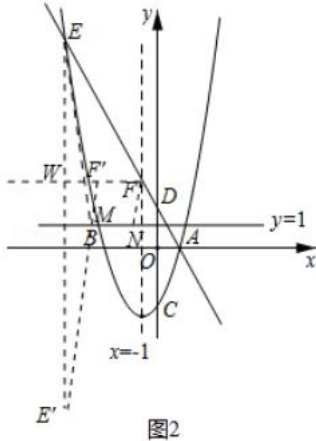
综上所述, 满足条件的点 P 的坐标为 $(0, 12)$ 或 $(0, 14.5)$.

(3) $\therefore E, F$ 为定点,

\therefore 线段 EF 的长为定值,

\therefore 当 $EM + FN$ 的和最小时, 四边形 $MEFN$ 的周长最小,

如图 2 中，画出直线 $y=1$ ，将点 F 向左平移 2 个单位得到 F' ，
作点 E 关于直线 $y=1$ 的对称点 E' ，连接 $E'F'$ 与直线 $y=1$ 交于点 M ，过点 F 作 FN
 $\parallel E'F'$ 交直线 $y=1$ 于点 N ，



由作图可知， $EM = E'M$ ， $FN = F'M$ ，
 $\therefore E'$ ， M ， F' 三点共线，
 $\therefore EM + FN = E'M + F'M = E'F'$ ，此时 $EM + FN$ 的值最小，
 \therefore 点 F 为直线 $y = -2x + 2$ 与 $x = -1$ 的交点，
 $\therefore F(-1, 4)$ ，
 $\therefore F'(-3, 4)$ ，
 $\therefore E(-5, 12)$ ，
 $\therefore E'(-5, -10)$ ，

如图，延长 FF' 交线段 EE' 于 W ，

$\therefore FF' \parallel$ 直线 $y=1$ ，

$\therefore FW \perp EE'$ ，

在 $\text{Rt}\triangle WEF$ 中， $EF = \sqrt{EW^2 + FW^2} = \sqrt{(12-4)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle E'F'W$ 中， $E'F' = \sqrt{E'W^2 + F'W^2} = \sqrt{(4+10)^2 + (-3+5)^2} = 10\sqrt{2}$ ，

\therefore 四边形 $MEFN$ 的周长的最小值 $= ME + FN + EF + MN = E'F' + EF + MN = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2$ 。

【点评】 本题属于二次函数综合题，考查了二次函数的性质，待定系数法，相似三角形的判定和性质，解直角三角形，轴对称最短问题等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用轴对称解决最短问题，属于中考压轴题

更多本地试卷及相关功能请点击下方图片中二维码即可领取

亚诺·小亚智学

智能学习系统

#帮助孩子提高自主学习能力#

 发现问题

 暂存问题

 解决问题

 复习巩固

本地学校题库

- ✓ 海量本地区市真题资源；
- ✓ 周边区市优质题库资源；
- ✓ 永久持续更新。

相似题训练

➤ 根据发现、暂存问题推送相似题训练



限时申请使用
免费

亚诺·小亚智学 智能学习系统

扫描右侧二维码申请免费名额

