江苏省新海高级中学 2020-2021 学年度第一学期期末模拟考试

高三数学学科试卷

本试题卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

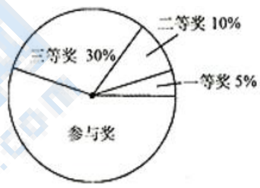
1.设集合 $A=\{x|2\le x<4\}$，集合 $B=\{x|3x-7\ge 8-2x\}$，则集合 $A\cup B=$（　　）

A．$[2,+\infty)$　　B．$[2,3)$　C．　$[3,4)$　　D．$[3,+\infty)$

2.已知复数 z 满足 $z(1-2i)=|3+4i|$（其中 i 为虚数单位)，则复数 z 的虚部为（　　）

A．1　　　B．i　　　C．2　　　D．$2i$

3.某班级在一次数学竞赛中为全班同学设置了一等奖、二等奖、三等奖以及参与奖，且奖品的单价分别为：一等奖 20 元、二等奖 10 元、三等奖 5 元、参与奖 2 元，获奖人数的分配情况如图所示，则以下说法正确的是（　　）



A. 参与奖总费用最高　　　　　　　B. 三等奖的总费用是二等奖总费用的 2 倍

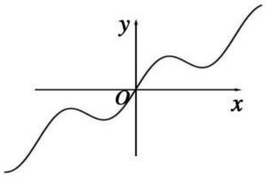
C. 购买奖品的费用的平均数为 4.6 元　　D. 购买奖品的费用的中位数为 5 元

4.在 ΔABC 中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的（　　）

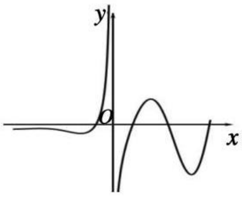
A.充要条件　　　　　　　　　　B.必要不充分条件

C.充分不必要条件　　　　　　　D.既不充分也不必要条件

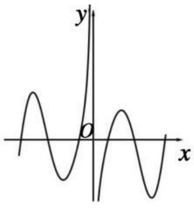
5.函数 $f(x)=\dfrac{3^{|x|}\bullet\cos 2x}{x}$ 的部分图象大致是（　　）



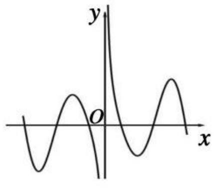
A



B



C



D

6.已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$ 的一条渐近线与直线 $x-2y+3=0$ 垂直，则 a 值为（　　）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. ± 4

7.已知函数 $f(x)=-x^2-3x-1$，$\mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^x+ex}{2ex}$，实数 m，n 满足 $m<n<0$，若

$\forall x_1\in[m，n]$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 $n-m$ 的最大值为(　　)

A. 1　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. $\sqrt{5}$

8.在“全面脱贫”行动中，贫困户小王 2020 年 1 月初向银行借了扶贫免息贷款 10000 元，用于自己开发的农产品、土特产品加工厂的原材料进货，因产品质优价廉，上市后供不应求，据测算：每月获得的利润是该月初投入资金的 20%，每月底街缴房租 800 元和水电费 400 元，余款作为资金全部用于再进货，如此继续，预计 2020 年小王的农产品加工厂的年利润为（　　）

（取 $1.2^{11}=7.5$，$1.2^{12}=9$）

A. 25000 元　　　　B. 26000 元　　　　C. 32000 元　　　　D. 36000 元

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1>0$，公差 $d\neq0$，则（　　）

A. 若 $S_4>S_8$,则 $S_{12}>0$　　　　B. 若 $S_4=S_8$,则 S_6 是 S_n 中最大的项

C. 若 $S_4>S_5$,则 $S_5>S_6$　　　　D. 若 $S_4>S_5$,则 $S_3>S_4$

10.某港口一天 24h 内潮水的高度 S（单位：m）随时间 t（单位：h，$0\leqslant t\leqslant 24$）的变化近似满足关系式 $S(t)=3\sin(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{5\pi}{3})$，则下列说法正确的有（　　）

A. $S(t)$ 在[0，2]上的平均变化率为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,m/h$　B. 相邻两次潮水高度最高的时间间距为 24h

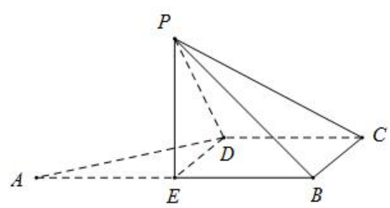
C. 当 $t=6$ 时，潮水的高度会达到一天中最低　D. 4 时潮水起落的速度为 $\dfrac{\pi}{6}\,m/h$

11.如图直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\dfrac{1}{2}AB=1$，E 为 AB 中点.以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且 $PC=\sqrt{3}$ 则（　　）

A.平面 $PED\perp$ 平面 PCD　　　　B. $PC\perp BD$

C.二面角 $P-DC-B$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$

D. PC 与平面 PED 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

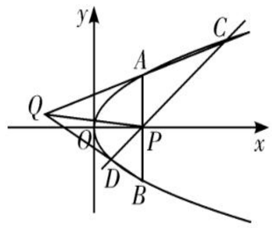


12.如图，过点 $P(1,0)$ 作两条直线 $x=1$ 和 $l: x=my+1(m>0)$ 分别交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 和 C,D (其中 A,C 位于 x 轴上方)，直线 AC,BD 交于点 Q.则下列说法正确的（　　）

A. C,D 两点的纵坐标之积为 -4　　B. 点 Q 在定直线 $x=-1$ 上

C. 点 P 与抛物线上各点的连线中，PO 最短

D. 无论 CD 旋转到什么位置，始终有 $\angle CQP=\angle BQP$



三、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上。

13. $(4ax-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式中 x^2 的系数为 70，则 $a=$________.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\dfrac{9}{x}(x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是________.

15. 在△ABC 中，D 为边 BC 上一点，DC = 2，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，若 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，且角 $B=\dfrac{\pi}{6}$，则 AC=________.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=4, BC=4\sqrt{2}, AC=8, AB\perp BC$. 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，若球 O 是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，则球 O 的半径为_________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$0<\theta<\pi$.

（1）若 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，求 $\cos\theta$ 的值；（2）若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，求 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$ 的值.

18.（本题满分 12 分）

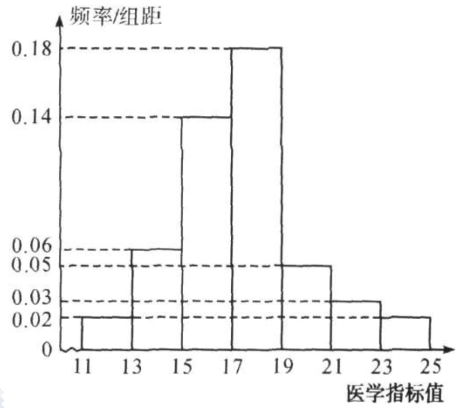
在① $2S_{n+1}=S_n+1$，② $a_2=\dfrac{1}{4}$，③ $S_n=1-2a_{n+1}$ 这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，给出解答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足____，____；又知正项等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；（2）设 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前项和 T_n.

19.（本题满分 12 分）

为检测某种抗病毒疫苗的免疫效果，某药物研究所科研人员随机选取 100 只小白鼠，并将该疫苗首次注射到这些小白鼠体内．独立环境下试验一段时间后检测这些小白鼠的某项医学指标值并制成如下的频率分布直方图（以小白鼠医学指标值在各个区间上的频率代替其概率）：



第 19 题图

(1)根据频率分布直方图，估计 100 只小白鼠该项医学指标平均值 $\overline{x}$（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）；

(2)若认为小白鼠的该项医学指标值 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且首次注射疫苗的小白鼠该项医学指标值不低于 14.77 时，则认定其体内已经产生抗体；进一步研究还发现，对第一次注射疫苗的 100 只小白鼠中没有产生抗体的那一部分群体进行第二次注射疫苗，约有 10 只小白鼠又产生了抗体．这里 μ 近似为小白鼠医学指标平均值 $\overline{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2. 经计算得 $s^2=6.92$，假设两次注射疫苗相互独立，求一只小白鼠注射疫苗后产生抗体的概率 p（精确到 0.01).

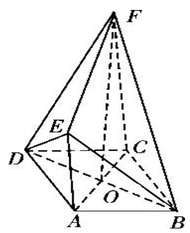
附：参考数据与公式

$\sqrt{6.92}\approx 2.63$，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则① $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6827$;
② $P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9545$; ③ $P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9973$.

20.（本小题满分 12 分）

如图菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\parallel AE$，$AB=AE=4$.

(1)求证：$BD\perp$ 平面 $ACFE$；



(2)当直线 FO 与平面 BED 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 时,

求异面直线 OF 与 BE 所成的角的余弦值大小.

21.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右顶点、上顶点分别为 A、B，原点 O 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}ab$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P,Q 为椭圆 C 上两不同点,线段 PQ 的中点为 M .

①当 M 的坐标为 $(1,1)$ 时，求直线 PQ 的直线方程；

②当三角形 OPQ 面积等于 $\sqrt{2}$ 时，求 $|OM|$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax+\sin x-1$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $1\le a<2$ 时，证明：函数 $g(x)=(x-2)f(x)$ 有且仅有 3 个零点.

江苏省新海高级中学 2020-2021 学年度第一学期期末模拟考试

高三数学学科试卷答案

本试题卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

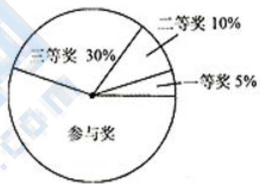
1.设集合 $A=\{x|2\le x<4\}$，集合 $B=\{x|3x-7\ge 8-2x\}$，则集合 $A\cup B=$（ A ）

A. $[2,+\infty)$　B. $[2,3)$　C. $[3,4)$　D. $[3,+\infty)$

2.已知复数 z 满足 $z(1-2i)=|3+4i|$ (其中 i 为虚数单位)，则复数 z 的虚部为（ C ）

A. 1　B. i　C. 2　D. $2i$

3.某班级在一次数学竞赛中为全班同学设置了一等奖、二等奖、三等奖以及参与奖，且奖品的单价分别为：一等奖 20 元、二等奖 10 元、三等奖 5 元、参与奖 2 元，获奖人数的分配情况如图所示，则以下说法正确的是（C ）



A. 参与奖总费用最高　B. 三等奖的总费用是二等奖总费用的 2 倍

C. 购买奖品的费用的平均数为 4.6 元　D. 购买奖品的费用的中位数为 5 元

4.在 ΔABC 中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的（ A ）

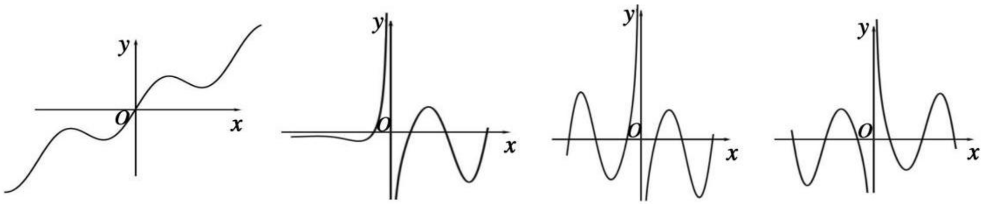
A.充要条件　B.必要不充分条件

C.充分不必要条件　D.既不充分也不必要条件

5.已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$ 的一条渐近线与直线 $x-2y+3=0$ 垂直，则 a 值为（ C ）

A. 2　B. 3　C. 4　D. ± 4

6.函数 $f(x)=\dfrac{3^{|x|}\bullet\cos 2x}{x}$ 的部分图象大致是（ D ）



A　　　　B　　　　C　　　　D

7.已知函数 $f(x)=-x^{2}-3x-1$，$g(x)=\dfrac{e^{x}+ex}{2ex}$，实数 m，n 满足 $m<n<0$，若

$\forall x_1\in[m, n]$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 $n-m$ 的最大值为（ A ）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

8.在“全面脱贫”行动中，贫困户小王 2020 年 1 月初向银行借了扶贫免息贷款 10000 元，用于自己开发的农产品、土特产品加工厂的原材料进货，因产品质优价廉，上市后供不应求，据测算：每月获得的利润是该月初投入资金的 20%，每月底街缴房租 800 元和水电费 400 元，余款作为资金全部用于再进货，如此继续，预计 2020 年小王的农产品加工厂的年利润为（ C ）（取 $1.2^{11}=7.5$，$1.2^{12}=9$）

A. 25000 元　　B. 26000 元　　C. 32000 元　　D. 36000 元

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1>0$，公差 $d\neq 0$，则（ B C ）

A. 若 $S_4>S_8$，则 $S_{12}>0$　　B. 若 $S_4=S_8$，则 S_6 是 S_n 中最大的项

C. 若 $S_4>S_5$，则 $S_5>S_6$　　D. 若 $S_4>S_5$，则 $S_3>S_4$

10.某港口一天 24h 内潮水的高度 S（单位：m）随时间 t（单位：h，$0\leq t\leq 24$）的变化近似满足关系式 $S(t)=3\sin(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{5\pi}{3})$，则下列说法正确的有（ AD）

A. $S(t)$ 在[0，2]上的平均变化率为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,m/h$

B. 相邻两次潮水高度最高的时间间距为 24h

C. 当 $t=6$ 时，潮水的高度会达到一天中最低

D. 4 时潮水起落的速度为 $\dfrac{\pi}{6}\,m/h$

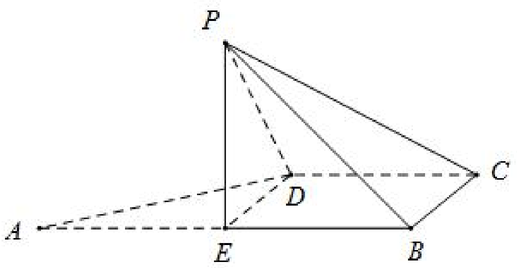
11.如图直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=1$，E 为 AB 中点.以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且 $PC=\sqrt{3}$ 则（ ABD ）

A.平面 $PED\perp$ 平面 PCD

B. $PC\perp BD$

C.二面角 $P-DC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$

D. PC 与平面 PED 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$



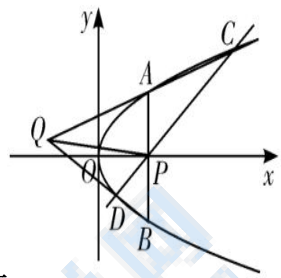
12.如图，过点 $P(1,0)$ 作两条直线 $x=1$ 和 $l: x=my+1(m>0)$ 分别交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 和 C,D (其中 A,C 位于 x 轴上方)，直线 AC,BD 交于点 Q.则下列说法正确的（ ABC ）

A. C,D 两点的纵坐标之积为 -4

B. 点 Q 在定直线 $x=-1$ 上

C. 点 P 与抛物线上各点的连线中，PO 最短

D. 无论 CD 旋转到什么位置，始终有 $\angle CQP=\angle BQP$



三、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上。

13. $(4ax-\frac{1}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式中 x^2 的系数为 70，则 $a=$___$\pm\frac{1}{4}$___.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\frac{9}{x}(x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是_6_____.

15. 在△ABC 中，D 为边 BC 上一点，DC＝2，∠BAD＝$\frac{\pi}{6}$，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，且角 B＝$\frac{\pi}{6}$，则 AC=___$\sqrt{7}$_____.

解：因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，又 CD＝4，则 CB＝10，BD＝6，又∠BAD＝∠B＝$\frac{\pi}{6}$，故 AD＝BD＝6，且∠ADC＝$\frac{\pi}{3}$ 在△ACD 中，由余弦定理：$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC=28$，故 AC＝$\sqrt{7}$.

17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=4, BC=4\sqrt{2}, AC=8, AB\perp BC$.

平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，若球 O 是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，则球 O 的半径为___4______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$0<\theta<\pi$.

（1）若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 $\cos\theta$ 的值;

（2）若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，求 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$ 的值.

解：(1) 因为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，所以 $-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cos\theta$，即 $-\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$，

所以 $\tan\theta=-\sqrt{3}$， 又 $0<\theta<\pi$，所以 $\theta=\frac{2}{3}\pi$. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ …………4 分

(2)因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{b}^2$，化简得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

又 $\boldsymbol{a}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$，

所以 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{2}$，则 $\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{4}<0$，

又 $0<\theta<\pi$，$\cos(\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以

$$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\sin\left[\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$$

……………10 分

18.（本题满分 10 分）

在① $2S_{n+1}=S_n+1$，② $a_2=\frac{1}{4}$，③ $S_n=1-2a_{n+1}$ 这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，并给出解答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足____，____；又知正项等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（2）设 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前项和 T_n.

18.解：选择①②:

（1）解：由 $2S_{n+1}=S_n+1 \Rightarrow$ 当 $n\ \ 2$ 时，有 $2S_n=S_{n-1}+1$，两式相减得：$2a_{n+1}=a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\ \ 2$．又当 $n=1$ 时，有 $2S_2=S_1+1=2(a_1+a_2)$，又 Q $a_2=\frac{1}{4}$，$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=(\frac{1}{2})^n$；设正项等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，Q $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列，$\therefore (b_3-2)^2=b_1b_7$，

即 $(3+2d-2)^2=3(3+6d)$，解得：$d=4$ 或 $d=-\frac{1}{2}$（舍），$\therefore b_n=3+4(n-1)=4n-1$，

故 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，$b_n=4n-1$．

选择：②③：

（1）解：由 $S_n=1-2a_{n+1} \Rightarrow$ 当 $n\ \ 2$ 时，$S_{n-1}=1-2a_n$，两式相减得：$a_n=-2a_{n+1}+2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\ \ 2$．又当 $n=1$ 时，有 $S_1=1-2a_2=a_1$，又 Q $a_2=\frac{1}{4}$，$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=(\frac{1}{2})^n$；设正项等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，Q $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列，$\therefore (b_3-2)^2=b_1b_7$，

即 $(3+2d-2)^2=3(3+6d)$，解得：$d=4$ 或 $d=-\frac{1}{2}$（舍），$\therefore b_n=3+4(n-1)=4n-1$，

故 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，$b_n=4n-1$．

（2））$c_n=(4n-1)\times 2^n$

所以 $T_n=3\times 2^1+7\times 2^2+11\times 2^3+\ldots+(4n-1)\times 2^n$，

则 $2T_n=3\times 2^2+7\times 2^3+\ldots+(4n-5)\times 2^n+(4n-1)\times 2^{n+1}$，

两式相减得 $-T_n=6+4(2^2+2^2+\ldots+2^n)-(4n-1)\times 2^{n+1}$

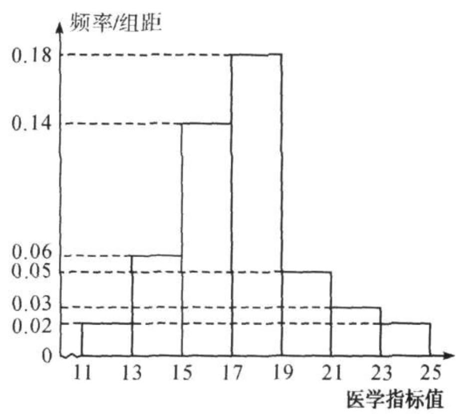
$$=6+4\times\frac{4\ (1-2^{n-1})}{1-2}-(4n-1)\times 2^{n+1}$$

$$=-10+2^{n+1}(5-4n)$$

$\therefore T_n=10+2^{n+1}(4n-5)$

19．（本题满分 12 分）

为检测某种抗病毒疫苗的免疫效果，某药物研究所科研人员随机选取 100 只小白鼠，并将该疫苗首次注射到这些小白鼠体内．独立环境下试验一段时间后检测这些小白鼠的某项医学指标值并制成如下的频率分布直方图（以小白鼠医学指标值在各个区间上的频率代替其概率）：



第 19 题图

(1)根据频率分布直方图，估计 100 只小白鼠该项医学指标平均值$\overline{x}$（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）；

(2)若认为小白鼠的该项医学指标值X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且首次注射疫苗的小白鼠该项医学指标值不低于 14.77 时，则认定其体内已经产生抗体；进一步研究还发现，对第一次注射疫苗的 100 只小白鼠中没有产生抗体的那一部分群体进行第二次注射疫苗，约有 10 只小白鼠又产生了抗体. 这里μ近似为小白鼠医学指标平均值$\overline{x}$, σ^2近似为样本方差s^2. 经计算得$s^2=6.92$，假设两次注射疫苗相互独立，求一只小白鼠注射疫苗后产生抗体的概率p（精确到 0.01).

附：参考数据与公式

$\sqrt{6.92}\approx 2.63$，若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

①$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6827;$

②$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9545;$

③$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9973.$

19. 解：(1)

X	12	14	16	18	20	22	24
p	0.04	0.12	0.28	0.36	0.10	0.06	0.04

$\overline{x}=EX=0.04\times12+0.12\times14+0.28\times16+0.36\times18+0.10\times20+0.06\times22+0.04\times24=17.4$ ………（6 分）

(2) $\mu-\sigma=17.40-2.63=14.77$

$\therefore p(x\ge\mu-\sigma)=0.6827+\dfrac{1-0.6827}{2}=0.8414$

记事件A表示首先注射疫苗后产生抗体，则

$\therefore p(A)=0.8414$，$p(\overline{A})=0.1586$

因此 100 只小鼠首先注射疫苗后有$100\cdot0.8414\approx84$只产生抗体，有 100-84=16 只没有产生抗体.故注射疫苗后产生抗体的概率$P=\dfrac{84+10}{100}=0.94$ ………………………（12 分）

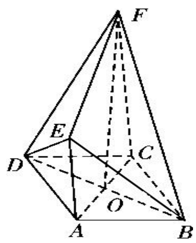
20.（本小题满分 12 分）

如图，菱形$ABCD$中，$\angle ABC=60°$，AC与BD相交于点O，$AE\perp$平面$ABCD$，$CF\parallel AE$，$AB=AE=4$.

(1)求证：$BD\perp$平面$ACFE$;

(2)当直线FO与平面BED所成的角为$\dfrac{\pi}{4}$时，

求异面直线OF与BE所成的角的余弦值大小.



20.(1)因为四边形$ABCD$是菱形，所以$BD\perp AC$.因为$AE\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，所以$BD\perp AE$.因为$AC\cap AE=A$，所以$BD\perp$平面$ACFE$.

(2)以O为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的方向为x，y轴正方向，过O且平行于CF的直线为z轴(向上为正方向),

建立空间直角坐标系，则 $B(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$，$D(0,\ -2\sqrt{3},\ 0)$，$E(2,0,4)$，$F(-2,0,\ a)(a>0)$，$\overrightarrow{OF}=(-2,0,$ $a)$．设平面 EBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ x+2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-$ $2,0,1)$，由题意 FO 与平面 BED 所成的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}=|\cos\langle\overrightarrow{OF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OF}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|4+a|}{\sqrt{a^2+4}\cdot\sqrt{5}}$．

因为 $a>0$，所以解得 $a=6$．所以 $\overrightarrow{OF}=(-2,0,6)$，$\overrightarrow{BE}=(2,\ -2\sqrt{3},\ 4)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OF},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{OF}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{-4+24}{\sqrt{40}\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$．

故异面直线 OF 与 BE 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$．

21.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，右顶点、上顶点分别为 A、B，原点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}ab$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P,Q 为椭圆 C 上两不同点,线段 PQ 的中点为 M．

①当 M 的坐标为 $(1,1)$ 时，求直线 PQ 的直线方程；

②当三角形 OPQ 面积等于 $\sqrt{2}$ 时，求 $|OM|$ 的取值范围．

解：（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ....2 分

（2）① $x+2y-3=0$ ....5 分

②1.若直线 PQ 垂直于 x 轴，则 $\frac{1}{2}|x_p|\times 2|y_p|=\sqrt{2}\Rightarrow x_p{}^2(2-\frac{x_p{}^2}{2})=2\Rightarrow x_p{}^2=2$

$\Rightarrow x_M{}^2=2, y_M=0$ 所以 $|OM|=\sqrt{2}$

2. 若直线 PQ 不垂直于 x 轴，设直线 PQ 方程：$y=kx+m(m\neq 0)$ $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$ 所以 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}, \Delta>0$ ....8 分

因此$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{|m|\sqrt{4+8k^2-2m^2}}{1+2k^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow m^2(2+4k^2-m^2)=(1+2k^2)^2\Rightarrow[(1+2k^2)-m^2]^2=0\Rightarrow 1+2k^2=m^2$

而$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2km}{1+2k^2}=-\frac{2k}{m}$，$y_M=kx_M+m=\frac{1}{m}$，

所以$|OM|=\sqrt{\frac{4k^2+1}{m^2}}=\sqrt{\frac{2m^2-1}{m^2}}=\sqrt{2-\frac{1}{m^2}}$

因为$1+2k^2=m^2$所以$m^2\ge 1$所以$1\le|OM|<\sqrt{2}$

综合 1 和 2 可知$|OM|\in[1,\sqrt{2}]$............12 分

22. 已知函数$f(x)=e^x-ax+\sin x-1$.

（1）若函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，求实数a的取值范围；

（2）当$1\le a<2$时，证明：函数$g(x)=(x-2)f(x)$有且仅有 3 个零点.

22 解：（1）$\because f'(x)=e^x-a+\cos x\ \therefore a\le e^x+\cos x,\forall x\in(0,+\infty)$

令$h(x)=e^x+\cos x,x\in(0,+\infty)$，

$h'(x)=e^x-\sin x>0,\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$为增函数.

$\therefore h(x)>h(0)=2,\therefore a\le 2.$

(2) 易知$x=2,x=0$是$g(x)=(x-2)f(x)$的两个零点.

因为$1\le a<2$，由（1）知，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，$f(x)>f(0)=0$，无零点.

所以下证函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上有且仅有 1 个零点.

①当$x\in(-\infty,-\pi]$时，$\because 1\le a<2,\therefore -ax\ge\pi,\therefore f(x)\ge e^x+\pi+\sin x-1>0$. 无零点.

②当$x\in(-\pi,0)$时，$\because\sin x<0,\therefore f''(x)>0\ \therefore f'(x)$在（$-\pi,0$）上递增，

又$\because f'(0)=2-a>0,f'(-\pi)=e^{-\pi}-1-a<0,$

$\therefore$存在唯一零点$x_0\in(-\pi,0)$，使得$f'(x_0)=0.$

当$x\in(-\pi,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\pi,x_0)$上递减；

当$x\in(x_0,0)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(x_0,0)$上递增.

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上有且仅有 1 个零点.

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有且仅有 1 个零点.

综上：当 $1 \le a < 2$ 时，函数 $g(x)=(x-2)f(x)$ 有且仅有 3 个零点.